Géodésiques du demi-plan

On considère le demi-plan complexe $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\ Im(z) > 0\}$, muni d'un produit scalaire ponctuel $(u, v)_z = \frac{(u,v)}{Im(z)^2}$ où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$. On note $\|\cdot\|_z$ la norme associée.

Soient a, b deux points de $\mathbb{H}$, on note $\mathcal{C}_{a,b} = \{c \in \mathcal{C}^1_{pm}([0, 1], \mathbb{H})|c(0) = a, c(1) = b\}$. Si $c \in \mathcal{C}_{a,b}$, on définit sa longueur par $L(c) = \int_0^1 \|c'(t)\|_{c(t)}dt$. Un segment géodésique de a à b est une courbe c de longueur minimale de $\mathcal{C}_{a,b}$, et une courbe géodésique est une courbe qui est localement un segment géodésique.

Théorème. *Les géodésiques de $\mathbb{H}$ sont exactement les demi-droites verticales et les cercles dont le centre est sur l'axe réel. En particulier, il passe par deux points distincts a et b une unique géodésique à reparamétrage près.*

Démonstration. On commence par définir et étudier l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$, en montrant que c'est une action par isométrie, au sens où pour toute courbe c de $\mathbb{H}$, $T \in PSL_2(\mathbb{R})$, $L(T \circ c) = L(T)$.

Il existe une action de groupe fidèle de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donnée explicitement par l'homographie :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Avec les conventions $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$. Pour montrer que c'est bien une action, on peut faire le calcul explicitement. Notamment, ce groupe comprend les translations apr un réel $z \mapsto z + a$, le produit par un réel positif $z \mapsto \lambda z$, l'inversion $z \mapsto -1/z$.

Cette action laisse $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (vu comme sous-ensemble de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) stable, et son action restreinte à cet ensemble est 2 transitive ; on peut utiliser une translation, une inversion, puis une translation, pour envoyer n'importe quelle paire de points sur $(\infty, 0)$.

Montrons que $PSL_2(\mathbb{R})$ agit bien sur le demi-plan ; pour tout $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{H}$, $Im(A.z) = \frac{Imz}{|cz+d|^2} > 0$

$PSL_2(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de la forme $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$, qui correspondent aux actions $z \mapsto z + a$ et $z \mapsto \frac{-1}{z}$. En effet, $PSL_2(\mathbb{R})$ est engendré par les transvections, et $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ dans $PSL_2(\mathbb{R})$.

Il suffit donc de vérifier que ces deux actions sont des isométries.

Soit c un chemin, $t \in [0,1]$, on a $\|(c+a)'(t)\|_{(c+a)(t)} = \|c'(t)\|_{c(t)}$, donc la première est une isométrie.

Et $\|(\frac{-1}{c})'(t)\|_{\frac{-1}{c}(t)} = \frac{|\frac{c'(t)}{c^2(t)}|}{Im(\frac{-1}{c})} = \|c'(t)\|_{c(t)}$. $PSL_2(\mathbb{R})$ agit donc bien par isométries.

Soient $a, b \in \mathbb{H}$ deux points distincts. Si a et b sont de partie réelles distinctes, on trace la médiatrice du segment $[a,b]$; celle-ci croise l'axe réel en un point, et on peut donc tracer le cercle passant par a et b intersectant $\mathbb{R}$ perpendiculairement en u et v. Si a, b sont de même partie réelle, supposons $Im(a) < Im(b)$ (quitte à permuter les points), on note $u = Re(a)$ et $v = \infty$.

$PSL_2(\mathbb{R})$ agit 2-transitivement sur la droite projective réelle, donc il existe une isométrie T qui envoie u sur 0 et v sur ∞. $PSL_2(\mathbb{R})$ préserve les cercles/droites, et agit par fonction conformes, donc préserve les angles. En particulier, comme $PSL_2(\mathbb{R})$ envoie $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, il conserve les cercles/droites orthogonaux à $\mathbb{R}$.

$a' := T(a)$ et $b' := T(b)$ sont donc sur une droite perpendiculaire à l'axe réel, qui passe par 0, donc sur la droite imaginaire pure, avec $Im(a') < Im(b')$. De plus, T est une isométrie bijective, donc $T(C_{a,b}) = C_{a',b'}$.

Soit alors $p : \begin{cases} \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ x + iy \mapsto y \end{cases}$ la projection orthogonale sur l'axe imaginaire pur. p est une **contraction** de $C_{a',b'}$, au sens où p préserve $\mathcal{C}_{a',b'}$ (car a' et b' sont fixes par p) et $\forall c \in \mathcal{C}_{a',b'}$, $L(p \circ c) \leq L(c)$ avec une inégalité stricte dès que c n'est pas contenue dans la droite imaginaire.

En effet, pour tout t, $\|(p \circ c)'(t)\|_{(p \circ c)(t)} = \frac{|p(c'(t))|}{Imc(t)} \leq \|c'(t)\|_{c(t)}$ avec égalité si et seulement si $c'(t)$ est imaginaire pur.

Les géodésiques sont donc nécessairement des courbes incluses dans l'axe imaginaire pur. Notons $\alpha = Im(a')$, $\beta = Im(b')$, on est alors ramené a problème de la minimisation de $\int_0^1 \frac{|f'(t)|}{f(t)} dt$, où $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}_+^*)$ avec $f(0) = \alpha$, $f(1) = \beta$. En considérant $g = \log \circ f$, cela revient à minimiser $\int_0^1 |g'(t)| dt$ sous la contrainte $g(0) = \log(\alpha)$, $g(1) = \log(\beta)$; il est claire que pour toute telle fonction g, on a

$$\int_0^1 |g'(t)| dt \geq |\int_0^1 g'(t) dt| = |\log(\beta/\alpha)|$$

Et il y a égalité si et seulement si g est croissante (ce qui est équivalent à f croissante), ce qui correspond bien à la géodésique recherchée.

Ainsi, il existe une unique (à reparamétrage près) géodésique de a à b, dont un paramétrage est donnée par $\gamma(t) = i \exp(\log|a| + t(\log|b| - \log|a|)$. Sa longueur est donnée $L(\gamma) = |\log|b| - \log|a|| = |\log|\frac{a}{b}||$.

$\square$

Référence : Mostly Surfaces, Richard Schwartz