Fonction caractéristique dérivable sans moment

Théorème. *Soit* $(b_n)_{n\geq 0}$ *une suite décroissante qui tend vers 0, on pose* $\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k \sin(kt)$. *Alors* ϕ_n *converge localement uniformément sur* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$*, et on a l'équivalence suivante :*

$$(nb_n \to 0) \iff (\phi_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R})$$

Corollaire. *Soit* $C^{-1} = \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^2 \log(k)}$*, et* μ *la distribution de probabilité sur* $\mathbb{Z}$ *définie par* $\mu(n) = \frac{C}{2n^2 \log(|n|)}$*. Soit* ϕ *sa fonction caractéristique, alors* $\phi \in \mathcal{C}^1$ *et* $\mathbb{E}[|\mu|] = \infty$*.*

Démonstration. Soit $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} sin(kt)$, on a $S_n(t) = Im\frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^it-1}$ (somme géométrique), donc $|S_n(t)| \leq \frac{1}{|\sin(t/2)|}$.

Une transformée d'Abel sur ϕ_n donne

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (S_k(t) - S_{k-1}(t))b_k = S_n(t)b_n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k(t)(b_k - b_{k+1})$$

Soit K un compact de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\delta > 0$ la distance entre K et $\mathbb{Z}$. Le premier terme converge uniformément vers 0 car $|S_n(t)b_n| \leq \frac{b_n}{|\sin(\delta/2)|}$, et le second terme est une somme qui converge absolument (car $\sum_{k=0}^{n-1} |S_k(t)(b_k - b_{k+1})| \leq \frac{b_0}{|\sin(\delta/2)|}$, donc uniformément, donc ϕ_n converge uniformément. Notons ϕ sa limite et $R_n = \phi - \phi_n$ le reste, la même transformée d'Abel donne $|R_n(t)| \leq \frac{b_n}{|\sin(t/2)|}$.

$(\Longleftarrow)$

Si ϕ_n converge uniformément, alors $v_n(t) := \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin(kt)$ converge uniformément vers 0. En particulier, $v_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \to 0$, et :

$$v_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} b_{2n}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi n}{2n}\right) = nb_{2n}$$

D'où le résultat.

$(\Longrightarrow)$

ϕ se prolonge naturellement à $\mathbb{R}$ de manière continue par $\phi(0) = 0$ et ϕ_n converge donc simplement vers ϕ. La majoration $|R_n(t)| \leq \frac{b_n}{|\sin(t/2)|}$ n'est pas suffisante pour avoir la convergence uniforme : on découpe le reste en 2. Soit $p > 0$ que l'on fixe plus tard, on a

$$\begin{aligned} |R_n(t)| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k|\sin(kt)| + |R_{n+p}(t)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} kb_k|t| + \frac{b_{n+p}}{|\sin(t/2)|} \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $N > 0$ tel que pour tout $n > N$, $nb_n < \varepsilon$. Soit alors $n > N$, $t \in [-\pi, \pi]$:

$$|R_n(t)| \leq \left(p|t| + \frac{\pi}{p|t|}\right)\varepsilon$$

Avec $p = E(1/t) + 1$, on a une majoration suffisante, d'où le résultat. □

Démonstration. La fonction caractéristique de μ est $\phi(t) = C\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k^2 \log(k)}$. On note ϕ_n les sommes partielles, notons qu'il y a convergence absolue donc uniforme de la suite des sommes partielles.

$\phi_n'(t) = -C\sum_{k=2}^{n} \frac{\sin(kt)}{k \log(k)}$, donc ϕ_n' vérifie les hypothèses du théorème et converge uniformément vers une fonction continue, et ϕ est donc $\mathcal{C}^1$.
Une comparaison série/intégrale donne $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{C}{k \log(k)} \geq C \log\log_2(n) \to \infty$, ce qui prouve le résultat. □

Référence : fgn - oraux X-ENS