Espace stable par translation

Lemme. *Soit $(f_1, .., f_n)$ une famille de fonctions linéairement indépendantes. Alors il existe $x_1 < .. < x_n$ une famille de $\mathbb{R}$ telle que la matrice $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est inversible.*

Démonstration. Soit $F = Vect(f_1, .., f_n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $ev_x : \begin{cases} F \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x) \end{cases}$.
ev_x est un élément de F^*. De plus, si $f \in \cap \ker(ev_x)$ alors pour tout x, $f(x) = 0$, donc $f = 0$. Ainsi, $Vect(ev_x, x \in \mathbb{R}) = F^*$. En particulier, il existe $x_1, .., x_n$ tel que $ev_{x_1}, .., ev_{x_n}$ forme une base de F^* (car $dim(F^*) = dim(F)$). La matrice $(ev_{x_j}(f_i))_{1\leq i,j\leq n}$ est donc inversible, d'où le résultat. □

Théorème. *Soit F un espace de fonction réelles continues de dimension finie, stable par translation. Alors F est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre* $\dim(F)$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\forall f \in F$, f est dérivable ; on se ramènera ensuite à ce cas.

Soit $(f_1, .., f_n)$ une base de F, $(x_1, .., x_n)$ choisi comme dans le lemme. On note $\tau_a f = f(\cdot + a)$ l'opérateur de translation.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $i \in [1, n]$, il existe une unique famille de réels $(\lambda_{i,j}(a))_{1\leq j\leq n}$ telle que

$$\tau_a f_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}(a) f_j \tag{1}$$

Notons $M(a) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice des $(f_i(x_j + a))_{1\leq i,j\leq n}$; $M(0)$ est inversible selon le lemme. Notons aussi $\Lambda(a)$ la matrice des $(\lambda_{i,j}(a))_{1\leq i,j\leq n}$. En évaluant l'expression (1) en les x_k, on obtient la relation

$$M(a) = \Lambda(a)M(0)$$

Donc $\lambda(a) = M(a)M(0)^{-1}$. Or, $a \mapsto M(a)$ est dérivable par hypothèse, donc $a \mapsto \Lambda(a)$ l'est aussi. On dérive la relation (1) selon la variable a, en $a = 0$;

$$f_i' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}'(0) f_j \in F$$

Ainsi, F est stable par dérivation. L'opérateur de dérivation ∂_x restreint à F est un endomorphisme en dimension finie ; il admet donc un polynôme minimal P, tel que. Pour tout $f \in F$, $P(\partial_x)f = 0$.
F est donc inclus dans l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (à coefficients constants) $P(\partial_x)f = 0$; notons S l'ensemble de ces solutions, on a $F \subset S$, et $dim(S) = deg(P) \leq dim(F)$, donc $S = F$, et $deg(P) = dim(F)$.

Passons au cas $F \subset C^0$: on note $(f_1, .., f_n)$ une base de F. On pose $g_i(x) = \int_0^x f_i$, et $G = Vect(1, g_1, .., g_n)$. G est alors stable par translation, et les g_i sont dérivables ; on peut appliquer la preuve précédente à G et alors les g_i sont $\mathcal{C}^\infty$. On a $f_i = g_i' \in \mathcal{C}^\infty$. En particulier, les f_i sont dérivables ; on peut appliquer la preuve précédente à F, ce qui conclut. $\square$

En application, cos et sin (ou alors, cosh et sinh) vérifient une équation différentielle linaire à coefficients constants d'ordre 2.

Remarque. *En utilisant le théorème de différentiation de Lebesgue, et le même raisonnement que ci-dessus, on peut montrer le résultat pour* $F \subset L^1_{loc}$