Enveloppe convexe et points extrémaux

Dans toute la suite, E est un espace Euclidien.

Définition. Soit C un convexe de E, on note $Ext(C)$ l'ensemble des points extrémaux, c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in C$ tels que $C \setminus \{x\}$ est convexe.
Soit C un convexe fermé, $x \in \partial C$, on dit que $H = \varphi^{-1}(a)$ (où $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ est un hyperplan (affine) d'appui de C en x si $\varphi(x) = a$ et $C \subseteq \varphi^{-1}(]-\infty, a])$.

Lemme. *Soit C un convexe fermé de E, $x \in \partial C$, alors il existe un hyperplan d'appui de C en x.*

Démonstration. x est sur le bord du fermé C, donc tous les voisinages de x dans E intersectent le complémentaire de C ; il existe z_n une suite de $E \setminus C$ tel que $z_n \to x$. On note p la projection orthogonale sur C, et $u_n = \frac{z_n - p(z_n)}{\|z_n - p(z_n)\|}$.
u_n est à valeur dans un compact (E est de dimension finie), donc quitte à extraire, on suppose que u_n converge vers u (dans la sphère unité).
Soit $y \in C$, par caractérisation de la projection orthogonale, on a pour tout n :

$$\langle u_n, y - p(z_n) \rangle \leq 0$$

D'où :

$$\langle u, y - x \rangle \leq 0$$

Alors $\varphi = \langle u, \cdot \rangle$ et $a = \varphi(x)$ conviennent. □

Lemme. *Soit H un hyperplan d'appui de C un convexe fermé de E, alors $Ext(C) \cap H = Ext(C \cap H)$.*

Démonstration. On note $H = \varphi^{-1}(a)$. On ne montre que l'inclusion ($\supseteq$) (l'autre est directe, et inutile pour la suite). Soit $x \in Ext(C \cap H)$, et $y, z \in C$ tels que $x = \frac{y+z}{2}$. Alors $\varphi(y), \varphi(z) \leq a$ et leur moyenne vaut a, donc $\varphi(y) = \varphi(z) = a$, et comme x est extrémal dans $C \cap H$, alors $y = z = x$, d'où le résultat. □

Théorème. *Soit C un convexe compact de E. Alors*

$$C = Conv(Ext(C))$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n = dim(E)$. Si $n = 1$, alors C est un segment compact $[a, b]$. Alors $Ext(C) = \{a, b\}$, et le résultat est vrai.

Soit maintenant $n \geq 2$ tel que la propriété soit vraie en dimension $n - 1$. Soit $x \in C$, il y a deux cas :
-$x \in \partial C$. Selon le lemme, il existe H un hyperplan d'appui en x. $H \cap C$ est non vide (x est dedans), compacte, convexe, dans un espace de dimension $n - 1$. Alors $x \in H \cap C = Conv(Ext(H \cap C)) \subseteq Conv(Ext(C))$ (selon le second lemme).

-$x \in Int(C)$: Soit D une droite passant par x, $D \cap C$ est un convexe compact de dimension 1, donc un segment $[y, z]$. Alors tous les voisinages de y (et z) intersectent le complémentaire de C, donc $y, z \in \partial C$. Et $x \in Conv(y, z) \subseteq Conv(Ext(C))$ selon le cas précédent.

Notons que la disjonction de cas n'était pas nécessaire : je l'ai faite par soucis de clarté. Notons aussi qu'il n'est pas évident que $Ext(C)$ soit non vide : cela découle du cas en une dimension. $\square$