Diagonalisation des opérateurs compacts

Théorème. *Soit E un espace de Hilbert complexe, et $T \in End(E)$ un opérateur continue, auto-adjoint, compact. Alors il existe $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle (éventuellement finie) qui tend vers 0, $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs orthonormés tels que :*

$$\begin{aligned}&\forall n,\ Te_n = \lambda_n e_n\\ &Adh(Vect(e_n, n\geq 1)) \oplus \ker(T) = E\end{aligned}$$

Lemme. *Sous les même hypothèses, en supposant E non réduit à 0, $\|T\|^2$ est valeur propre de T^2.*

Démonstration. On suppose que $T \neq 0$ sans perte de généralité. Soit x_n une suite de la sphère de E telle que $Tx_n \to \|T\|$.
$(Tx_n)_n$ est incluse dans un compact métrique ; quitte à extraire, on suppose que $Tx_n \to y$ où $y \neq 0$ car $\|y\| = \|T\|$. On montre que y est vecteur propre de T^2 pour $\|T\|^2$.

$$\begin{aligned}\|T^2x_n - \|T\|^2x_n\|^2 &= \|T^2x_n\|^2 + \|T\|^4\|x_n\|^2 - 2\mathrm{Re}(T^2x_n, \|T\|^2x_n)\\ &= \|T^2x_n\|^2 + \|T\|^4\|x_n\|^2 - 2\|Tx_n\|^2\|T\|^2\\ &\leq \|T\|^2\|Tx_n\|^2 + \|T\|^4\|x_n\|^2 - 2\|Tx_n\|^2\|T\|^2\\ &= \|T\|^2(\|T\|^2 - \|Tx_n\|^2) \to 0\end{aligned}$$

Or, $T^2x_n \to Ty$. Donc $\|T\|^2x_n \to Ty$, d'où $T^2y = \lim \|T\|^2Tx_n = \|T\|^2y.$, ce qui achève la preuve. □

Démonstration. Dans la suite, on note $E_\lambda = \ker(T - \lambda I)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Ce sont des sous-espaces fermés, orthogonaux deux à deux. En effet, si $\lambda \neq \mu$, $(x, y) \in E_\lambda \times E_\mu$, alors :

$$\lambda(x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = \mu(x, y)$$

D'où $(x, y) = 0$. Soit $F = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}}^{\perp} E_\lambda$. $\bar{F} = E$ si et seulement si $F^\perp = \{0\}$, car $\bar{F} \oplus F^\perp = E$ (propriété des espaces de Hilbert).
$F^\perp$ est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert, donc un espace de Hilbert. T stabilise $F^\perp$ car pour tout $x \in F^\perp$, $y \in E_\lambda$, on a $(Tx, y) = (x, Ty) = \lambda(x, y) = 0$.
$T_{|F^\perp}$ est donc un opérateur auto-adjoint compact de $F^\perp$.
Si $F^\perp$ n'est pas réduit à 0, on applique le lemme ; $T^2_{|F^\perp} - \|T_{|F^\perp}\|^2$ n'est pas injective et

$$T^2_{|F^\perp} - \|T_{|F^\perp}\|^2 = (T_{|F^\perp} - \|T_{|F^\perp}\|I)(T_{|F^\perp} + \|T_{|F^\perp}\|I),$$

donc $\pm\|T_{|F^\perp}\|$ est valeur propre de $T_{|F^\perp}$ pour un certain vecteur propre $x \in T_{|F^\perp} \setminus \{0\}$. Mais alors, $x \in E_{\pm\|T_{|F^\perp}\|}$, donc $(x, x) = 0$; absurde, donc $F^\perp$ est réduit à 0.

Soit maintenant $\alpha > 0$, on montre que $\bigoplus_{|\lambda|>\alpha}^{\perp} E_\lambda$ est de dimension finie.
B^α la boule unité de $\bigoplus_{|\lambda|>\alpha}^{\perp} E_\lambda$, on a :

$$T(B^\alpha) \supseteq \alpha B^\alpha$$

B^α est relativement compacte, donc selon le théorème de Riesz, B^α est incluse dans un espace de dimension finie.
On peut donc définir la suite décroissante en module $\lambda_n \to 0$ des $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que E_λ n'est pas réduit à 0, avec multiplicité, et une famille orthonormée e_n propre aux λ_n.

□

Corollaire. *Soit E un espace de Hilbert et $T \in End(E)$ un opérateur compact et normal ($T^*T = TT^*$). Alors il existe $(\lambda_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite (éventuellement finie) qui tend vers 0, associée à une suite orthonormée $(e_n)_{n\geq 1}$, telle que (e_n) est une base Hilbertienne de $Ker(T)^\perp$ et $Te_n = \lambda_n e_n$.*