Décomposition de Dunford effective

Théorème. *Soit $A \in M_n(K)$ une matrice sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$. On construit la suite suivante :*

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1} \end{cases}$$

Alors cette suite converge en moins de $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ étapes vers une matrice diagonalisable D telle que $A = D + (A - D)$ soit la décomposition de Dunford de A.

Démonstration. On montre par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \begin{cases} A_k \in K[A] \\ P(A_k) \in P(A)^{2^k} K[A] \\ P'(A_k) \in Gl_n(K) \\ A_{k+1} - A_k \text{ est nilpotente} \end{cases} \quad]$$

Initialisation :
P est sans facteur carré, donc $P \wedge P' = 1$. Soient $S, T \in K[X]$ tels que $SP + TP' = 1$. On a alors $T(A)P'(A) = I - S(A)P(A)$ et $P(A)$ est nilpotent car $\chi_A | P^n$. Tout commute, I est inversible, donc $I - S(A)P(A)$ est inversible. On a bien $P(A) \in P(A)^{2^0} K[A]$. Enfin, $A_1 - A_0 = -P(A)P'(A)^{-1}$ est bien nilpotente.

Hérédité :
On suppose $k \geq 1$ et la propriété vraie au rang $k - 1$.
$A_k = A_{k-1} - P(A_{k-1})P'(A_{k-1})^{-1}$ est bien un polynôme en A ; on note que si B est inversible, B^{-1} est bien un polynôme en B (en multipliant l'égalité $\chi_B(B) = 0$ par B^{-1}, et en notant que le coefficient constant de χ_B est non nul).
Notons $P(X + H) = P(X) + P'(X)H + R(X, H)H^2$ le développement de Taylor de P.

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(A_{k-1} - P(A_{k-1})P'(A_{k-1})^{-1}) \\ &= P(A_{k-1}) - P'(A_{k-1})P(A_{k-1})P'(A_{k-1})^{-1}) \\ &+ R(A_{k-1}, -P(A_{k-1})P'(A_{k-1})^{-1})(-P(A_{k-1})P'(A_{k-1})^{-1})^2 \\ &= R(A_{k-1}, -P(A_{k-1})P'(A_{k-1})^{-1})(-P(A_{k-1})P'(A_{k-1})^{-1})^2 \\ &\in P(A_{k-1})^2 K[A] \subset P(A)^{2^k} K[A] \end{aligned}$$

$T(A_k)P'(A_k) = I - P(A_k)S(A_k)$, or $P(A_k) \in P(A)^{2^k} K[A]$ est nilpotent, donc $P'(A_k)$ est inversible.
Enfin, $A_k - A_{k-1} = -P(A_{k-1})P'(A_{k-1})$ est nilpotent. Cela achève la récurrence.

$P(A)$ est nilpotent ; si $k > \log_2(n)$, alors $P(A_k) \in P(A)^n K[A] = \{0\}$. On note $k_0 > \log_2(n)$ quelconque. $D := A_{k_0}$ est annulée par un polynôme scindé à racines simples, et

est donc diagonalisable.
$A - D = \sum_{k=0}^{k_0-1} A_k - A_{k+1} =: N$ est une somme de matrices nilpotentes qui commutent, et est donc nilpotente. On obtient donc une décomposition de Dunford de A, et D, N sont des polynômes en A.
Soit D', N' une autre décomposition. D et D' commutent et sont donc codiagonalisables. N et N' commutent et $N - N'$ est donc nilpotente. Alors $N - N' = D' - D$ est nilpotente diagonalisable, donc nulle. $\square$