Liens entre table de caractère et sous-groupes distingués.

Théorème. *Soit G un groupe fini, $\chi_1, \cdots, \chi_n$ ses caractères irréductibles. Alors les sous-groupe distingués de G sont exactement les $\bigcap_{j\in J} \ker(\chi_j)$, où $J \subset \{1 \cdots n\}$, et $\ker(\chi) = \{g \in G$ tels que $\chi(g) = \chi(1)\}$.*

Démonstration. Si χ est un caractère associé à une représentation (V, ρ) de dimension d, alors $\ker(\chi)$ est l'ensemble de $g \in G$ tel que $Tr(\rho(g)) = d$.
Si $g \in \ker(\rho)$, alors $g \in \ker(\chi)$. Réciproquement, soit $g \in \ker(\chi)$, $\rho(g)^{|G|} = id_V$, donc $\rho(g)$ est annulé par $X^{|G|} - 1$, qui est un polynôme scindé à racine simples. $\rho(g)$ est donc diagonalisable, et ses valeurs propres sont des racines de l'unité. De plus, leur somme vaut d : selon le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, celle-ci sont positivement liées, et valent alors toutes 1. Donc $\rho(g) = id_V$ et alors $\ker(\rho) = \ker(\chi)$ est donc un "vrai" noyau de morphisme : les noyaux de caractère sont des sous-groupes distingués, leurs intersections aussi.

Réciproquement, soit H un sous-groupe distingué de G, on va construire une représentation (non nécessairement irréductible) (V, ρ, χ) telle que $H = \ker(\chi)$.
Soit $(R, \tilde{\rho})$ la représentation régulière du groupe G/H, $\pi : G \to G/H$ le morphisme de projection. Soit alors $\rho = \tilde{\rho} \circ \pi$; (R, ρ) est bien une représentation de G. De plus $\rho(g) = id_R$ si et seulement si $\tilde{\rho}(\pi(g)) = id_V$, or $\tilde{\rho}$ est fidèle, donc si et seulement si $g \in H$, d'où $\ker(\chi) = H$.

On écris alors R comme somme directe de sous-représentation irréductibles ; on a $\chi = \sum_{i=1}^n n_i\chi_i$, avec $\sum_{i=1}^n n_i = \dim(R)$. Ainsi, $\ker(\chi) = \cap_{i|n_i\neq 0} \ker(\chi_i)$, d'où le résultat. □

En corollaire, on peut établir la table de caractère de S_4 pour identifier tout ses sous-groupes distingués.